

Лемма Тиббса. Пусть $f_i(t), i = \overline{1, n}$ - выпуклые дифференц. функции. Рассмотрим задачу

$$\max_{x \in M_0} \sum_{i=1}^n f_i(x_i) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i^0), \quad M_0 = \{x \in E^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = A, x_i \geq 0, i = \overline{1, n}\}$$

необходимое и достаточное условие опт. распределения ресурса x^0 :

$$\exists \lambda: \quad f_i'(x_i^0) = \lambda, \text{ если } x_i^0 > 0 \\ f_i'(x_i^0) \leq \lambda, \text{ если } x_i^0 = 0.$$

1) Если $f_1'(0) > f_2'(0) > \dots > f_n'(0)$ и $f_i''(0) < 0, i = \overline{1, n}$, то

$$\exists \ell: x_i^0 > 0, i = \overline{1, \ell}, x_{\ell+1}^0 = \dots = x_n^0 = 0.$$

В экономической интерпретации вкладывать ресурс нужно в пункты с наибольшей нормой прибыли.

2) Если $f_1'(0) \leq \dots \leq f_n'(0)$, то $\exists \ell: x_1^0 = \dots = x_{\ell-1}^0 = 0, x_i^0 > 0, i = \overline{\ell, n}$

Отсюда следует алгоритм поиска x^0 :

В случае 1) решаем систему

$$f'_i(x_i^0) = \lambda, \quad i = \overline{1, l}, \quad \sum_{i=1}^l x_i^0 = A. \quad (1)$$

Их решаем при $l = n, n-1, \dots$ и проверяем условие $\lambda \geq f'_{l+1}(0)$. (2)

В случае 2) решаем систему

$$f'_i(x_i^0) = \lambda, \quad i = \overline{l, n}, \quad \sum_{i=l}^n x_i^0 = A \quad (3)$$

при $l = 1, 2, \dots$ и проверяем условие $f'_{l-1}(0) \leq \lambda$ (4)

Таким образом вычисление дифференцируемые

рассмотрим задачу $\min_{x \in K_0} \sum_{i=1}^n f_i(x_i) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i^0)$

Заменяя $f_i(t)$ на $-f_i(t)$, получим задачу на максимум суммарно.

Необходимое и достаточное условие оптимальности

$$\exists \lambda : \begin{cases} f'_i(x_i^0) = \lambda, & x_i^0 > 0 \\ f'_i(x_i^0) \geq \lambda, & x_i^0 = 0 \end{cases}$$

Если $f'_1(0) \leq f'_2(0) \leq \dots \leq f'_n(0)$, то
нужно вкладывать в первые пункты и решать систему (1)
проверяя условие $\lambda \leq f'_{r+1}(0)$
Если $f'_1(0) > \dots > f'_n(0)$, то решаем систему (2)
и проверяем условие $\lambda \leq f'_{r-1}(0)$.

Дискретная задача.

$f_i(t)$ - функция от целого аргумента

$$f_i(t) - f_i(t-1) \geq f_i(t+1) - f_i(t), \quad 0 \leq t \leq A$$

Задача $\max_{x \in M_0} \sum_{i=1}^n f_i(x_i) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i^*)$

Критерий Гросса для x^* :

$$\text{если } x_j^* > 0, \text{ то } f_j(x_j^*) - f_j(x_j^* - 1) \geq \max_{i \in K} [f_i(x_i^* + 1) - f_i(x_i^*)] \quad (5)$$

Алгоритм. Находим x^0 - опт. распределение в непр. задаче

$x^{(k)}$ получаем округлением x^0 . На шаге k проверяем условие (5): если $x_j^{(k)} > 0$, то $f_j(x_j^{(k)}) - f_j(x_j^{(k)} - 1) \geq \max_{i \in K} [f_i(x_i^{(k)} + 1) - f_i(x_i^{(k)})] =$

$$\text{Если не выполн. то } x_i^{(k+1)} = \begin{cases} x_j^{(k)} - 1, & i = j \\ x_e^{(k)} + 1, & i = e \end{cases} = f_e(x_e^{(k)} + 1) - f_e(x_e^{(k)})$$
$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)}, \quad i \neq j, e.$$

Если $f_i(t)$ выпуклые функции целого аргумента, т.
т.е. $f_i(t) - f_i(t-1) \leq f_i(t+1) - f_i(t)$ $\forall t \in \mathbb{N}$,
то условия для x^* :

$$x_j^* > 0 \Rightarrow f_j(x_j^*) - f_j(x_j^* - 1) \leq \\ \leq \min_{1 \leq i \leq n} [f_i(x_i^* + 1) - f_i(x_i^*)]$$

Алгоритм аналогичен.